MANUALE DELLA MATEMATICA

LO ZERO NELLE OPERAZIONI

$a+0=a$ $\quad a-0=a$ $\quad 0-a=-a$

$a\cdot 0=0$ $\quad 0\div a=0$ $\quad 0^n=0$ $\quad a^0=1$

Se $a\cdot b=0$ allora deve essere $a=0$ oppure $b=0$

$a\div 0$ non ha significato

$0\div 0$ è una forma indeterminata.

PRODOTTI NOTEVOLI

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ $\qquad (a\pm b)\cdot(a^2\mp 2ab+b^2)=a^3\pm b^3$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $\qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

TEOREMA DI RUFFINI

Un polinomio P(x) è divisibile per il binomio $x-a$ se $P(a)=0$

NUMERI COMPLESSI

Unità immaginaria: $j=\sqrt{-1}$

Potenze di j: $j^1=j$, $j^2=-1$, $j^3=-j$, $j^4=1$

Numeri complessi coniugati: $a+jb$ e $a-jb$

Formule di Eulero: $sen\phi=\dfrac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}$, $\qquad \cos\phi=\dfrac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}$

TEOREMI SUI RADICALI

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ $\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\bullet n]{a}$

RAZIONALIZZAZIONE DELLE FRAZIONI

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$

RADICALI DOPPI

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$ax + b = 0$ soluzione $x = -\frac{b}{a}$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è impossibile
Se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è ijndeterminata

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$ax^2 + bx = 0$ soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$

$ax^2 + c = 0$ soluzioni $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$ax^2 + bx + c = 0$ soluzioni $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$

Se $\Delta > 0$ sol. reali diverse; se $\Delta = 0$ sol. reali eguali se $\Delta < 0$ sol. complesse coniugate

Somma: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; *prodotto*: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

EQUAZIONI BIQUADRATICHE

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ si pone $x^2 = y$

EQUAZIONI BINOMIE

$mx^n + p = 0 \rightarrow x^n + \frac{p}{m} = 0$

Quindi si scompone:

$x^3 + a = 0 \rightarrow \left(x + \sqrt[3]{a}\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}\right) = 0$

$x^3 - a = 0 \rightarrow \left(x - \sqrt[3]{a}\right) \cdot \left(x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}\right) = 0$

$x^4 + a = 0 \rightarrow \left(x^2 + \sqrt[4]{4a}x + \sqrt{a}\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt[4]{4a}x + \sqrt{a}\right) = 0$

$x^4 - a = 0 \rightarrow \left(x^2 + \sqrt{a}\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{a}\right) = 0$

EQUAZIONI TRIINOMIE

$a[f(x)]^{2n} + b[f(x)]^n + c = 0$ si pone $[f(x)]^n = y$

EQUAZIONI RECIPROCHE

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ (soluz. nota $x = -1$)

$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ (soluz. nota $x = +1$)

$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ (soluz. note $x = \pm 1$)

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (soluz. nota $x = -1$)

$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$ (soluz. nota $x = +1$)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ → $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$

→ $a \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$ si pone $\left(x + \frac{1}{x} \right) = y$ → $a(y^2 - 2) + by + c = 0$

SISTEMI DI PRIMO GRADO

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by - c}{a} \\ a' \cdot \dfrac{-by - c}{a} + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Metodo di riduzione:

$$\begin{cases} aa'x + a'by + a'c = 0 \\ -aa'x - ab'y - ac' = 0 \end{cases}$$

da cui sommando:

$$(a'b - ab')y + a'c - ac' = 0$$

SISTEMI DI SECONDO GRADO

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + m = 0 \end{cases}$$

Si ricava

$$x = \frac{-by - c}{a}$$

e si sostituisce nell’altra equazione

SISTEMI SIMMETRICI

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

le soluzioni sono quelle dell'equazione:

$$t^2 - st + p = 0$$

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO $a > 0$

$ax + b > 0$	soluzione	$x > -\dfrac{b}{a}$

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO $a > 0$

$ax^2 + c \geq 0 \quad (c < 0) \qquad x \leq -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ e $x \geq \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

$ax^2 + c > 0 \quad (c > 0)$ e $ax^2 + bx + c > 0 \quad (\Delta < 0)$. Sempre

$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad (\Delta > 0) \qquad x \leq x_1$ e $x \geq x_2$

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (\Delta = 0) \qquad x \neq x_1 = x_2$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ equivale a $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$ equivale a $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ equivale a $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ U $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$ equivale a $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ U $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$$\log_a A(x) > b \qquad \begin{array}{l} \rightarrow a > 1 \Rightarrow A(x) > a^b \\ \rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases} \end{array}$$

$$\log_a A(x) < b \qquad \begin{array}{l} \rightarrow a > 1 \Rightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases} \\ \rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow A(x) > a^b \end{array}$$

PROGRESSIONI

Aritmetiche: $a_n = a_1 + (n-1)d$; $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Geometriche: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$

GEOMETRIA ANALITICA

Punto medio del segmento: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $\quad \bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Distanza fra due punti: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Fra punti con la stessa ascissa: $d = |y_2 - y_1|$

Fra punti con la stessa ordinata: $d = |x_2 - x_1|$

Intersezione fra due linee: si ottengono risolvendo il sistema

Traslazione degli assi: $x = X + a$; $\qquad y = Y + b$

Rotazione assi: $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$; $\qquad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$

Rotraslzione assi: $\begin{array}{l} x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{array}$

Condizione di appartenenza: $(x_o; y_o)$ appartiene a $y = f(x)$ se $y_o = f(x_o)$

Asse delle x: $y = 0$ $\qquad$ *Asse delle y*: $x = 0$

Retta parallela all'asse delle x: $y = k$, $\qquad$ *all'asse delle y*: $x = k$

Retta passante per l'origine: $y = mx$

Retta generica: $y = mx + q$ (m: coefficiente angolare)

Equazione segmentaria: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Bisettrici dei quadranti: $y = x$ e $y = -x$

Condizione di parallelismo: $m = m'$, *di perpendicolarità*: $m = -\frac{1}{m'}$

Angolo fra due rette: $\tan\alpha = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$

Retta per un punto: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Retta passante per due punti: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Distanza di un punto da una retta: $d = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$

Asse del segmento: $(x - x_1)^2 \cdot (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 \cdot (y - y_2)^2$

CIRCONFERENZA

Dati il centro *c* (*a*;*b*) e il raggio *r* l'equazione è $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

il centro è:

$$C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$$

e il raggio è:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$$ (deve essere $\alpha^2 + \beta^2 > 4\gamma$)

PARABOLA con asse parallelo a quello delle y

Equazione: $y = ax^2 + bx + c$

Vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ *Fuoco*: $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$

Asse: $-\frac{b}{2a}$ *Direttrice*: $-\frac{1 + \Delta}{4a}$

PARABOLA con asse parallelo a quello delle x

Equazione: $x = ay^2 + by + c$

Vertice: $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ *Fuoco*: $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

Asse: $-\frac{b}{2a}$ *Direttrice*: $-\frac{1+\Delta}{4a}$

ELLISSE

Equazione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Interseca l'asse nei punti (± *a*; 0) (0; ± *b*)

Se $a > b$ i fuochi sono (± *c*; 0) con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Se $a < b$ i fuochi sono (0; ± *c*) con $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

IPERBOLE

Equazione: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Interseca l'asse nei punti (± *a*; 0)

Ha per asintoti le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$

Se $a = b$ l'iperbole è equilatera. Se gli asintoti coincidono con gli assi l'iperbole equilatera ha l'equazione $xy = k$.

FUNZIONE OMOGRAFICA

Equazione: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

È un'iperbole equilatera con asintoti: $x = -\frac{d}{c}$ e $y = -\frac{a}{c}$

CONDIZIONE DI TANGENZA A UNA CONICA

$\Delta = 0$ (in cui Δ è il discriminante dell'equazione risolvente del sistema formato fra conica e retta)

TRIGONOMETRIA $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

Arco		Seno	Coseno	Tangente
0	0	0	1	0
30°	π/ 6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	π/ 4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	π/ 3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	π/ 2	1	0	$\pm\infty$
180°	π	0	-1	0
270°	3 π/ 2	-1	0	$\pm\infty$
360°	2π	0	1	0

$$\begin{cases} \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \\ \tan(90° \mp \alpha) = \pm\cot g\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(180° \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(180° \mp \alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

Formule di addizione e sottrazione:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

Formule di duplicazione:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Formule di bisezione:

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Formule parametriche:

$\sin\alpha = \dfrac{2\cdot t}{1+t^2}$ dove $\left(t = \tan\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan\alpha = \dfrac{2\cdot t}{1-t^2}$

Formule di prostaferesi:

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

Formule parametriche:

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Elementari:

$$\begin{array}{ll} \sin x = m(-1 \le m \le +1) & x = h180° + (-1)^h \alpha \\ \cos x = m(-1 \le m \le +1) & x = h360° \pm \alpha \\ \tan x = m(qualsiasi) & x = h180° + \alpha \end{array}$$

Omogenee in seno e coseno:

$$a \sin x + b \sin x = 0 \rightarrow a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow a \tan x + b = 0$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \rightarrow a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow a \tan x + b \tan x + c = 0$$

Riconducibili a omogenee:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \rightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Lineari:

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \rightarrow a \frac{2 \cdot t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0 \qquad \text{dove}\left(t = \tan \frac{x}{2}\right)$$

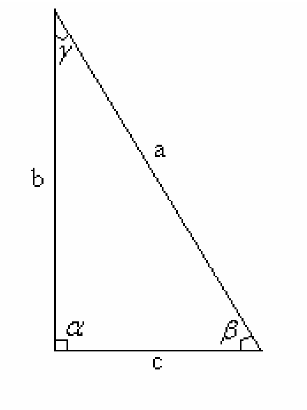
Simmetriche in seno e coseno:

$$a \sin x + a \cos x + b \sin x \cos x + c = 0 \qquad \text{si pone } x = 45° + y$$

TRIANGOLI RETTANGOLI (a: ipotenusa)

$b = a \sin \beta$ $\qquad$ $b = a \cos \gamma$

$b = c \tan \beta$ $\qquad$ $b = c \cot g \gamma$



TRIANGOLI QUALSIASI

Teorema dei seni: $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R$

Teorema del coseno o di Carnot: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Teorema delle tangenti: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

Formule di Briggs: $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

Superficie del triangolo: $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Raggio del cerchio circoscritto $R=\dfrac{abc}{4\cdot S}$; inscritto $r=\dfrac{S}{p}$

POTENZA

Definizione: $a^n=a\cdot a\cdot a......$ dove n è un numero

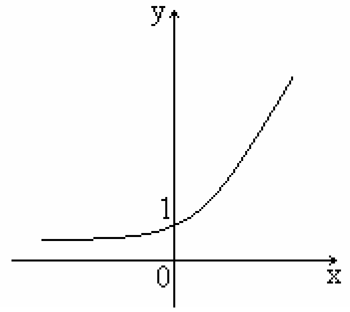
Proprietà e convenzioni: $a^1=a$; $a^0=1$; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$; $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$;

$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$; $(a\div b)^n=a^n\div b^n$; $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $a^m\div a^n=a^{m-n}$

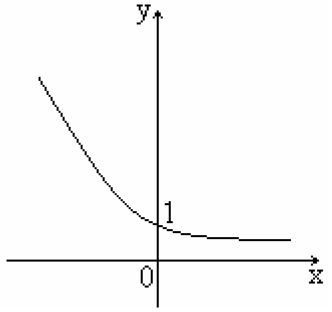
$(a^m)^n=a^{m\bullet n}$

FUNZIONI ESPONENZIALI $y=a^x$

$a>1$



$0<a<1$



Disuguaglianze esponenziali: $a^{f(x)}>0$ sempre

	$0<a<1$	$a>1$
$a^{f(x)}>1$	$f(x)<0$	$f(x)>0$
$a^{f(x)}>a^{g(x)}$	$f(x)<g(x)$	$f(x)>g(x)$
$a^{f(x)}>b$	$f(x)<\log_a b$	$f(x)>\log_a b$

LOGARITMI

Definizione: se $\log_a n = x$ allora $n = a^x$

Proprietà: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_n a \cdot b = \log_n a + \log_n b$;

$\log_n a^p = p \cdot \log_n a$; $\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$;

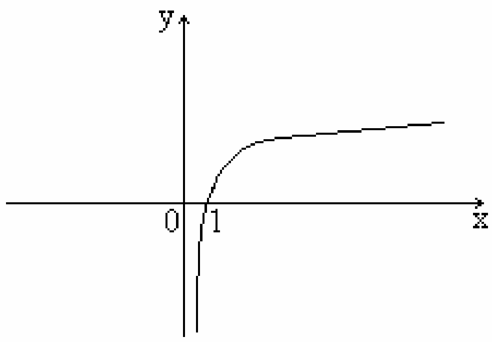
$\log_n \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p}\log_n a$; $\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$

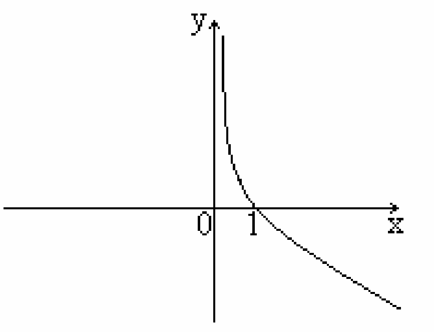
Base dei logaritmi naturali: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2{,}718\ldots$

FUNZIONE LOGARITMICA $y = \log_a x$

$a > 1$



$0 < a < 1$



$y = \log_a f(x)$ esiste per $f(x) > 0$

Disuguaglianze logaritmiche:

	0<*a*<1	*a*>1
$\log_a f(x) > 0$	$f(x) < 1$	$f(x) > 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) > n$	$f(x) < a^n$	$f(x) > a^n$

LIMITI

Sia $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

Valgono allora le seguenti relazioni:

Funzione	l finito $l \neq 0$	$l = 0^-$	$l = 0^+$	$l = +\infty$	$l = -\infty$
$f(x)+k$	$l+k$	k	k	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)-k$	$l-k$	$-k$	$-k$	$+\infty$	$-\infty$
$[f(x)]^n$ n pari	l^n	0^+	0^+	$+\infty$	$+\infty$
$[f(x)]^n$ n dispari	l^n	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
$\sqrt[n]{f(x)}$ n pari	$\sqrt[n]{l}$	non esiste	0^+	$+\infty$	non esiste
$\sqrt[n]{f(x)}$ n dispari	$\sqrt[n]{l}$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-
$-f(x)$	$-l$	0^+	0^-	$-\infty$	$+\infty$
$a^{f(x)}$ $a>1$	a^l	1^-	1^+	$+\infty$	0^+
$a^{f(x)}$ $0<a<1$	a^l	1^+	1^-	0^+	$+\infty$
$\log_a f(x)$ $a>1$	$\log_a l$	non esiste	$-\infty$	$+\infty$	non esiste
$\log_a f(x)$ $0<a<1$	$\log_a l$	non esiste	$+\infty$	$-\infty$	non esiste

N.B. il << non esiste >> si riferisce alla funzione

Sia $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l_2$.

Valgono allora le seguenti relazioni:

Funzione	l_1 ed l_2 finiti e $\neq 0$	$l_1 = 0$ $l_2 \neq 0$	$l_1 \neq 0$ $l_2 = 0$	$l_1 = 0$ $l_2 = 0$	$l_1 = \infty$ $l_2 = 0$	$l_1 = 0$ $l_2 = \infty$	$l_1 = \infty$ $l_2 \neq 0$	$l_1 \neq 0$ $l_1 = \infty$	$l_1 = \infty$ $l_2 = \infty$
$f(x)+g(x)$	l_1+l_2	l_2	l_1	0	∞	∞	∞	∞	∞
$f(x)-g(x)$	l_1-l_2	$-l_2$	l_1	0	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	IND.
$f(x)\cdot g(x)$	$l_1 \cdot l_2$	0	0	0	IND.	IND.	∞	∞	∞
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞	IND.	∞	0	∞	0	IND.

<<IND.>> vuol dire caso di indecisione

Funzioni continue: $y = f(x)$ è continua in c se risulta $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

DERIVATE

Definizione: $Dy = y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivate fondamentali:

$Dc = 0$ $\qquad Dx = 1$ $\qquad Dx^n = n \cdot x^{n-1}$ $\qquad D\sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$D\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\qquad D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$Da^x = a^x \log a$ $\qquad De^x = e^x$ $\qquad D\ln x = \frac{1}{x}$ $\qquad D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$

$D\sin x = \cos x$ $\qquad D\cos x = -\sin x$ $\qquad D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$D\cot gx = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot g^2 x$ $\qquad D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad D\tan 2x = \frac{2}{\cos^2 2x}$

Teoremi per il calcolo delle derivate:

$D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$ $\qquad D[k + f(x)] = f'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $\qquad D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$

$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ $\qquad D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivate di funzioni di funzione:

$D[f(x)]^n = n \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{n-1}$ $\qquad D\sin f(x) = f'(x)\cos f(x)$

$D\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\qquad De^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

$D\arcsin f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ $\qquad D\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$

Equazione della tangente: la curva $y = f(x)$ ha come tangente nel suo punto di ascissa c la retta:

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Campo di esistenza: le funzioni che presentano eccezioni sono le seguenti (fra parentesi è indicata la condizione per l'esistenza)

$y=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow[g(x)\neq 0]$ $\qquad$ $y=\log_a f(x)\rightarrow[f(x)>0]$

$y=\sqrt[n]{f(x)}\rightarrow[\,f(x)\geq 0$: solo però se n è pari]

$y=\arcsin f(x)$ e $y=\arccos f(x)\rightarrow[-1\leq f(x)\leq 1]$

$y=\tan f(x)\rightarrow\left[f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$

Equazione degli asintoti:

Se $\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty\rightarrow x=c$ asintoto verticale

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l\rightarrow y=l$ asintoto orizzontale

Asintoto obliquo: $y=mx+q$

Dove $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}f^{I}(x)$; $\qquad$ $q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$

Massimi e minimi:

Dove $f^{I}(x)>0$ è $f(x)$ crescente

Dove $f^{I}(x)<0$ è $f(x)$ decrescente

Se $f^{I}(c)=0$ e $f^{II}(c)>0$ in c minimo

Se $f^{I}(c)=0$ e $f^{II}(c)<0$ in c massimo

Concavità e flessi:

Dove $f^{II}(x)>0$ è $f(x)$ concava verso l'alto

Dove $f^{II}(x)<0$ è $f(x)$ concava verso il basso

Se $f^{II}(c)=0$ allora in c c'è un flesso

Altri elementi utili al disegno del grafico:

a) Osservazione di eventuali simmetrie;
b) Intersezione della curva con gli assi;
c) Segno della funzione;
d) Intersezione della curva con gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui;
e) Ordinate dei punti di minimo, massimo e flesso.

INTEGRALI

Definizione: $\int f(x)dx = g(x)+c$ se $Dg(x)= f(x)$

Proprietà: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Integrazione per parti:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]dx = f(x)\int g(x)dx - \int f^{I}(x)\cdot \left[\int g(x)dx\right]dx$$

Integrali fondamentali:

$\int kdx = kx+c$ $\int dx = x+c$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ con $n \neq -1$ $\int \sin xdx = -\cos x + c$

$\int \cos xdx = \sin x + c$ $\int \tan xdx = -\log|\cos x| + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot gx + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+c$ $\int e^x dx = e^x + c$

$\int \log xdx = x(\log x - 1)+c$ $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log(ax+b)+c$

$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$

$\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}\cdot x\cdot \sqrt[n]{x}+c$ $\int \cot gxdx = \log(\sin x)+c$

$\int \frac{1}{\sin x}dx = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)+c$ $\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)+c$

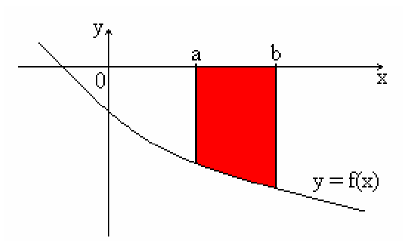
$\int \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx + c$ $\int \cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx + c$

$$\int \frac{a+bx}{mx+q}dx = \left(\frac{a}{m}-\frac{bq}{m^2}\right)\log(mx+q)+\frac{b}{m^2}(mx+q)+c$$

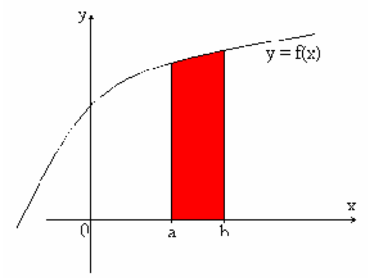
Integrali definiti:

$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$ se $\int f(x)dx = g(x)+c$

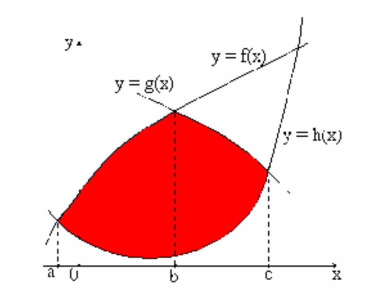
Calcolo delle superfici:



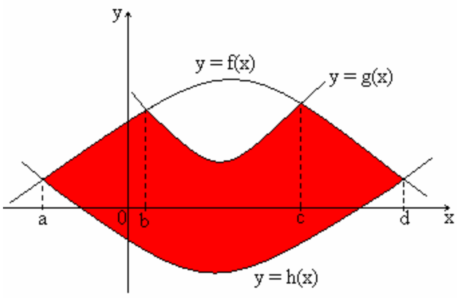
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



$$S = \int_a^b f(x)dx$$



$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx + \int_c^a h(x)dx$$



$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^a h(x)dx$$

Volume dei solidi:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

CALCOLO COMBINATORIO

Disposizioni semplici:

$$D_{n,k} = n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Disposizioni con ripetizioni:

$$D^*_{n,k} = n^k$$

Fattoriale di un numero:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\,; \qquad 0! = 1! = 1$$

Permutazioni:

$$P_n = n!$$

Permutazioni con a, b … elementi ripetuti:

$$P_{a,b,\ldots n} = \frac{n!}{a!b!\ldots}$$

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_K} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n} = 1; \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Potenza del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} {}_k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

IL NUMERO e

È un numero irrazionale trascendente base dei logaritmi naturali o neperiani.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{e} = 2{,}7182818284\ldots$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh a = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \qquad \cosh a = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \qquad \tanh a = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$

SERIE DI MAC LAURIN

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{\infty} {}_k \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sviluppo in serie di Mc Laurin delle seguenti funzioni:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots \quad \text{dove} \quad \binom{m}{n} = \frac{m[m-1][m-2]\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}$$